**第一讲不等式的性质与解法**

id:2147491790;FounderCES

题组1不等式的性质

1*.*[2014山东,5,5分][理]已知实数*x*,*y*满足*ax<ay*(0*<a<*1),则下列关系式恒成立的是()

A.*>* B.ln(*x*2*+*1)*>*ln(*y*2*+*1) C.sin *x>*sin *y* D.*x*3*>y*3

2*.*[2013北京,2,5分]设*a*,*b*,*c*∈R,且*a>b*,则()

A.*ac>bc* B.*<* C.*a*2*>b*2 D.*a*3*>b*3

题组2不等式的解法

3*.*[2016全国卷Ⅲ,1,5分][理]设集合*S=*{*x|*(*x-*2)(*x-*3)≥0},*T=*{*x|x>*0},则*S*∩*T=*()

A.[2,3] B.(*-∞*,2]∪[3,*+∞*) C.[3,*+∞*) D.(0,2]∪[3,*+∞*)

4*.*[2013天津,8,5分][理]已知函数*f*(*x*)*=x*(1*+a|x|*)*.*设关于*x*的不等式*f*(*x+a*)*<f*(*x*)的解集为*A.*若[*-*,]⊆*A*,则实数*a*的取值范围是()

A.(,0) B.(,0) C.(,0)∪(0,) D.(*-∞*,)

5*.*[2017天津,8,5分][理]已知函数*f*(*x*)*=*设*a*∈R,若关于*x*的不等式*f*(*x*)≥*|+a|*在R上恒成立,则*a*的取值范围是()

A[*-*,2] B*.*[*-*,] C*.*[*-*2 ,2] D*.*[*-*2 ,]

6*.*[2017全国卷Ⅲ,15,5分][理]设函数*f*(*x*)*=*则满足*f*(*x*)*+f*(*x-*)*>*1的*x*的取值范围是*.*

7*.*[2015广东,11,5分]不等式*-x*2*-*3*x+*4*>*0的解集为*.*(用区间表示)

8*.*[2014江苏,10,5分][理]已知函数*f*(*x*)*=x*2*+mx-*1,若对于任意*x*∈[*m*,*m+*1],都有*f*(*x*)*<*0成立,则实数*m*的取值范围是*.*

id:2147491811;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018贵阳市摸底考试,1]设集合*A=*{*x|*(*x-*1)(*x+*2)*<*0},*B=*{*x|<*0},则*A*∪*B=*()

A.(-2,1) B.(-2,3) C.(-1,3) D.(-1,1)

2*.*[2018豫南九校第二次联考,8]若0*<b<a<*1,则下列结论不成立的是()

A*.<* B*.>* C*.ab>ba* D*.*log*ba>*log*ab*

3*.*[2018武汉市部分学校调研测试,7]已知*x*,*y*∈R,且*x>y>*0,若*a>b>*1,则一定有()

A*.>* B*.*sin *ax>*sin *by* C*.*log*ax>*log*by* D*.ax>by*

4*.*[2018惠州市二调,4]“不等式*x*2*-x+m>*0在R上恒成立”的一个必要不充分条件是()

A.*m>* B.0*<m<*1 C.*m>*0 D.*m>*1

5*.*[2018全国名校第二次联考,15]已知函数*y=f*(*x*)是定义在R上的奇函数,当*x<*0时,*f*(*x*)*=-x+*2,那么不等式*f*(*x*)*+*1*<*0的解集是*.*

6*.*[2018长春市高三第一次质量监测,13]已知角*α*,*β*满足*-<α-β<*,0*<α+β<*π,则3*α-β*的取值范围是*.*

**B组提升题**

7*.*[2017惠州市三调,12]已知函数*f*(*x*)*=x*sin *x+*cos *x+x*2,则不等式*f*(ln *x*)*+f*(ln )*<*2*f*(1)的解集为()

A*.*(e,*+∞*) B*.*(0,e) C*.*(0,)∪(1,e) D*.*(,e)

8*.*[2018南宁市摸底联考,15]已知函数*f*(*x*)*=*(e*x-*e*-x*)*x*(e为自然对数的底数),*f*(log3*x*)*+f*(*x*)

≤2*f*(1),则*x*的取值范围是*.*

9*.*[2018南昌市摸底调研,16]已知函数*f*(*x*)*=*若不等式*|f*(*x*)*|-mx+*2≥0恒成立,则实数*m*的取值范围为*.*

10*.*[2017云南省高三统一检测,16]已知函数*f*(*x*)*=*若*f*(*x-*1)*<f*(2*x+*1),则*x*的取值范围为*.*

**答案**

id:2147497715;FounderCES

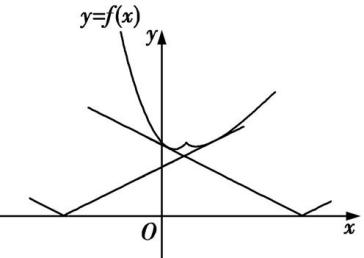
1*.*D根据指数函数的性质得*x>y*,但*x*2,*y*2的大小不确定,故选项A,B中的不等式不恒成立;根据三角函数的性质知,选项C中的不等式也不恒成立;根据不等式的性质知,选项D中的不等式恒成立.

2*.*D对于A项,若*c<*0,则结论显然不正确;对于B项,若*a>*0,*b<*0,则*<*显然不正确;对于C项,若*a=*1,*b=-*3,则*a*2*>b*2显然不正确*.*选D*.*

3*.*D集合*S=*(*-∞*,2]∪[3,*+∞*),结合数轴,可得*S*∩*T=*(0,2]∪[3,*+∞*)*.*故选D*.*

4*.*A由题意可得0∈*A*,即*f*(*a*)*<f*(0)*=*0,所以*a*(1*+a|a|*)*<*0,当*a>*0时无解,所以*a<*0,此时1*-a*2*>*0,所以*-*1*<a<*0*.*函数*f*(*x*)的图象(图略)中*x=*,*x=-*之间的距离大于1,而[*x+a*,*x*]的区间长度小于1,所以不等式*f*(*x+a*)*<f*(*x*)的解集是(*-*,*--*),所以[*-*,]⊆(*-*,*--*),所以即解得*<a<*,又*-*1*<a<*0,所以实数*a*的取值范围是(,0)*.*故选A*.*

5*.*A根据题意,作出函数*f*(*x*)的大致图象,如图D 7*-*1*-*2所示*.*



图D 7*-*1*-*2

当*x*≤1时,若要*f*(*x*)≥*|+a|*恒成立,结合图象,只需*x*2*-x+*3≥*-*(*+a*),即*x*2*-+*3*+a*≥0,

故对于方程*x*2*-+*3*+a=*0,*Δ=*(*-*)2*-*4(3*+a*)≤0,解得*a*≥*-*;

当*x>*1时,若要*f*(*x*)≥*|+a|*恒成立,结合图象,

只需*x+*≥*+a*,即*+*≥*a.*

又*+*≥2,当且仅当*=*,即*x=*2时等号成立,

所以*a*≤2*.*

综上,*a*的取值范围是[*-*,2]*.*

6*.*(*-*,*+∞*)当*x>*0时,*f*(*x*)*=*2*x>*1恒成立,当*x->*0,即*x>*时,*f*(*x-*)*=>*1,当*x-*≤0,即0*<x*≤时,*f*(*x-*)*=x+>*,则不等式*f*(*x*)*+f*(*x-*)*>*1恒成立*.*当*x*≤0时,*f*(*x*)*+f*(*x-*)*=x+*1*+x+=*2*x+>*1,所以*-<x*≤0*.*综上所述,*x*的取值范围是(*-*,*+∞*)*.*

7*.*(*-*4,1)*-x*2*-*3*x+*4*>*0⇒(*x+*4)(*x-*1)*<*0⇒*-*4*<x<*1*.*

8*.*(*-*,0)由题可得*f*(*x*)*<*0对于任意*x*∈[*m*,*m+*1]恒成立,即解得*-<m<*0*.*

id:2147497729;FounderCES

**A组基础题**

1*.*B*A=*{*x|-*2*<x<*1},*B=*{*x|-*1*<x<*3},所以*A*∪*B=*{*x|-*2*<x<*3},故选B*.*

2*.*D对于A, 函数*y=*在(0,*+∞*)上单调递减,所以当0*<b<a<*1时,*<*恒成立;对于B, 函数*y=*在(0,*+∞*)上单调递增,所以当0*<b<a<*1时,*>*恒成立;对于C, 函数*y=ax*(0*<a<*1)单调递减,函数*y=xa*(0*<a<*1)单调递增,所以当0*<b<a<*1时,*ab>aa>ba*恒成立;当*a=*,*b=*时,log*ab=*2,log*ba=*,log*ab>*log*ba*,D选项不成立,故选D*.*

3*.*D对于A选项,不妨令*x=*8,*y=*3,*a=*5,*b=*4,显然*=<=*,A选项错误;

对于B选项,不妨令*x=*π,*y=*,*a=*2,*b=*,此时sin *ax=*sin 2π*=*0,sin *by=*sin *=*,显然sin *ax<*sin *by*,B选项错误;

对于C选项,不妨令*x=*5,*y=*4,*a=*3,*b=*2,此时log*ax=*log35,log*by=*log24*=*2,显然log*ax<*log*by*,C选项错误;

对于D选项,∵*a>b>*1,*x>y>*0,∴*ax>bx*,*bx>by*,∴*ax>by*,D选项正确*.*

综上,选D*.*

4*.*C不等式*x*2*-x+m>*0在R上恒成立⇔*Δ<*0,即1*-*4*m<*0,∴*m>*,同时要满足“必要不充分”,在选项中只有“*m>*0”符合*.*故选C*.*

5*.*{*x|x>*0}由题意知,函数*y=f*(*x*)的定义域为R,当*x<*0时,*f*(*x*)*=-x+*2,则当*x>*0时,*-x>*0,所以*f*(*-x*)*=x+*2,又函数*y=f*(*x*)是定义在R上的奇函数,所以*f*(*x*)*=-f*(*-x*)*=-x-*2,即*f*(*x*)*=*因此不等式*f*(*x*)*+*1*<*0等价于或或解得*x>*0*.*

故不等式*f*(*x*)*+*1*<*0的解集为{*x|x>*0}*.*

6*.*(*-*π,2π)设3*α-β=m*(*α-β*)*+n*(*α+β*)*=*(*m+n*)*α+*(*n-m*)*β*,则解得

因为*-<α-β<*,0*<α+β<*π,所以-π*<*2(*α-β*)*<*π,故*-*π*<*3*α-β<*2π*.*

**B组提升题**

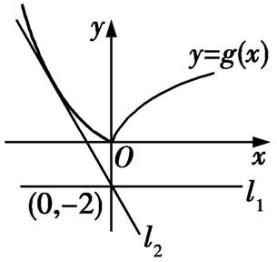
7*.*D由*f*(*x*)*=x*sin *x+*cos *x+x*2,可知*f*(*-x*)*=f*(*x*),即*f*(*x*)是偶函数,所以*f*(ln)*=f*(*-*ln *x*)*=f*(ln *x*),所以*f*(ln *x*)*+f*(ln)*<*2*f*(1)可变形为*f*(ln *x*)*<f*(1)*.f* *'*(*x*)*=x*cos *x+*2*x=x*(2*+*cos *x*),因为2*+*cos *x>*0,所以*f*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递增,在(*-∞*,0)上单调递减,所以*f*(ln *x*)*<f*(1)等价于*-*1*<*ln *x<*1,所以*<x<*e*.*故选D*.*

8*.*≤*x*≤3∵*f*(*x*)*=*(e*x-*e*-x*)*x*,∴*f*(*-x*)*=*(e*-x-*e*x*)(*-x*)*=*(e*x-*e*-x*)*x=f*(*x*),即函数*f*(*x*)是偶函数*.*∵ *f* *'*(*x*)*=*

(e*x-*e*-x*)*+x*(e*x+*e*-x*)≥0在[0,*+∞*)上恒成立,∴函数*f*(*x*)在[0,*+∞*)上单调递增*.*由*f*(log3*x*)*+f*(*x*)

≤2*f*(1),得2*f*(log3*x*)≤2*f*(1),即*f*(log3*x*)≤*f*(1),∴*|*log3*x|*≤1,解得≤*x*≤3*.*

9*.*[*-*3*-*2,0]由*f*(*x*)*=*知*|f*(*x*)*|=*不等式*|f*(*x*)*|-mx+*2≥0恒成立,即*|f*(*x*)*|*≥*mx-*2恒成立*.*令*g*(*x*)*=|f*(*x*)*|*,*h*(*x*)*=mx-*2,则原不等式恒成立等价于*y=h*(*x*)的图象不在*y=g*(*x*)图象的上方*.h*(*x*)*=mx-*2是过定点(0,*-*2)的直线系*.*如图D 7*-*1*-*3,



图D 7*-*1*-*3

*l*1与*x*轴平行,*l*2与曲线*y=x*2*-*3*x*(*x*≤0)相切,易知直线*l*1的斜率*k*1*=*0,设直线*l*2的斜率为*k*2,联立方程,得⇒*x*2*-*3*x-k*2*x+*2*=*0,即*x*2*-*(3*+k*2)*x+*2*=*0,则*Δ=*(3*+k*2)2*-*4*×*2*=*0,故*k*2*=-*2*-*3(2*-*3舍去),

结合图象易知*m*的取值范围为[*-*3*-*2,0]*.*

10*.*(*-∞*,*-*2)∪(0,*+∞*)若*x>*0,则*-x<*0,*f*(*-x*)*=*3(*-x*)2*+*ln(*+x*)*=*3*x*2*+*ln(*+x*)*=f*(*x*),同理可得,当*x<*0时,*f*(*-x*)*=f*(*x*),且*x=*0时,*f*(0)*=f*(0),所以*f*(*x*)是偶函数*.*因为当*x>*0时,函数*f*(*x*)单调递增,所以不等式*f*(*x-*1)*<f*(2*x+*1)等价于*|x-*1*|<|*2*x+*1*|*,整理得*x*(*x+*2)*>*0,解得*x>*0或*x<-*2*.*